桟橋の弾塑性解析プログラム
N-Pier
Version-3.00
計算理論マニュアル

2007 年 10 月

独立行政法人　港湾空港技術研究所
鋼管杭協会
株式会社 海洋河川技術研究所

― 目　次 ―

まえがき

1.　N-Pier の開発経緯 1

2.　N-Pier の構成 2

3.　N-Pier の解析理論 3
　3.1　解析モデル 3
　3.2　単杭の解析 5
　3.3　床版部の梁の解析 14
　3.4　全体系の解析 18

4.　インプットデータの作成方法 20
　4.1　インプットデータの構成 20
　4.2　インプットデータのフォーマット 21
　4.3　インプットデータの作成要領 33

5.　アウトプットの見方 41
　5.1　アウトプットの内容と計算の制御 41
　5.2　アウトプットの説明 44
　5.3　後処理用ファイルの説明 63
　5.4　エラーメッセージ 70

6.　適用例 72
　6.1 高浜桟橋の例 72
　6.2 大井 No.3 桟橋の例 84

Ver.3.00 のまえがき

「港湾の施設の技術上の基準を定める省令」の改正と「港湾の施設の技術上の基準の細目を定める告示」が、本年４月１日に施行されました。これを受けて、その考え方や思想を設計実務に的確に反映させるための解説書として、また、技術者が具体的な事例に対処できるようにするための資料として（社）日本港湾協会から「港湾の施設の技術上の基準・同解説」が刊行される予定となっています。新しい基準では、構造物の設計法やその形状・材質などを細かく規定する仕様規定型の設計体系から、構造物に求められる性能のみを規定し、設計結果に至るプロセスを規定しない性能規定型の設計体系に移行します。

これに伴い桟橋の耐震設計法も大幅に変更されることになりました。「桟橋の弾塑性解析プログラム(N-Pier Ver.3.00)」は、新しい基準に対応するために Ver.2.00 からバージョンアップを図ったものです。主な改良項目は次の３点です。

1) 従来の N-Pier は、Ｌ２地震時の弾塑性解析を行うために開発されたプログラムでしたが、今回はこれに加え、Ｌ１地震時や接岸時などの変動状態および永続状態に対して部分係数法（線形フレーム解析）によって性能照査を行える機能を追加しました。
2) Ｌ２地震時の非線形地盤バネの計算法は、従来の「道示」ベースの計算方法から、今回、「港湾」ベースの計算方法へ変更となりました。Ver.3.00 では、この新しい地盤バネの計算方法を採用しました。
3) 従来は、Ｌ１・Ｌ２地震に対しては応答スペクトルから求めた照査用震度と骨格曲線を用いて、応答変位を求めることを標準としていました。新基準では、L2 地震に対しては非線形動的解析を行い直接応答変位を求めることになりました。非線形動的解析には、FLIP 等を用いた有限要素法解析と質点系の動的解析があります。Ver.3.00 では、後者の方法に対応して１質点及び２質点の動的解析用プログラムを用意しました。なお、Ｌ１地震に対しては 1)で述べたように部分係数法によって照査を行います。

これら N-Pier Ver.3.00 の改良にあわせ、マニュアルの整備も行いました。新マニュアルは次の４つです。

1) N-Pier 解説書
2) N-Pier 操作マニュアル
3) N-Pier 例題集
4) N-Pier 計算理論マニュアル(本文書です)

1)では、N-Pier を用いて桟橋の設計を行う場合の基本事項について説明しています。新基準における変更点の整理、部分係数法による性能照査の具体的方法、L2 地震時の非線形構造モデルの説明、L2 地震時の質点系解析モデルの説明を主な内容としています。

2)は、実際に PC でデータを作成し、計算するユーザーのためのものであり、PC の操作方法について説明しています。

3)は、2)を補完するものであり、N-Pier で用意されている 16 のサンプルデータの内の 3 例について、具体的な計算条件を与え、それに対する入力データの作成方法を画面操作とあわせて説明しています。3 例の内の 2 例は、(財)沿岸技術研究センター発行の「港湾構造物設計事例集　平成 19 年　改訂版」を参考にしています。また、複雑なモデル、特殊な条件の場合のデータ作成方法についても説明しています。さらに、質点系動的解析の適用例もあわせて説明しています。

4)では、N-Pier の中心プログラムである構造解析プログラム NPILAN-SN の解析理論、インプットデータとアウトプットデータの説明を行っています。通常はこのマニュアルを見ることは少ないですが、計算の内容を深く理解する場合、N-Pier の計算結果に疑問が出た場合などには参照してください。

なお、1)と 4)では、N-Pier 開発の経緯についても紹介しています。これらのマニュアルが桟橋の適切な設計と N-Pier の正しい使用に役立つことを望みます。

2007 年 10 月

1. N-Pier の開発経緯

1990 年、鋼管杭協会と海洋河川技術研究所(以下、MRT)は、杭基礎設計用プログラム NPILAN(Non Linear Pile Analysis Program for Pile Foundation)を開発した。これは、橋脚の杭基礎を対象としたプログラムであり、地盤の非線形性が考慮されている。なお、ここではフーチングは剛体として扱われている。その後、杭体の非線形性の考慮など、新しい機能が追加された。

1995 年 1 月に発生した兵庫県南部地震は、橋梁や岸壁など多くの土木構造物に甚大な被害を与えた。それを契機に耐震設計法の大幅な見直しが行われ、巨大地震を対象とした構造物の保有耐力の検討が必要とされるようになった。NPILAN はそのために使われ、また、道路橋示方書の改訂に際しては、実験の検証計算や、試設計によるパラメータスタディなどに用いられた。

1997 年、鋼管杭協会と MRT は、NPILAN をベースに桟橋の地震時保有水平耐力を検討するプログラム NPILAN-SN を開発した。これは NPILAN では剛体としたフーチング部分を、床版としてモデル化するために梁要素で置き換えたものである。

その後 NPILAN-SN は桟橋の保有耐力の検討に用いられ、また、梁部材の非線形性の考慮などの機能強化が行われた。1999 年、「港湾の施設の技術上の基準」が改正され、直杭式桟橋を対象にした地震時保有水平耐力設計法が導入された。それにあわせて運輸省港湾技術研究所(現在の独立行政法人港湾空港技術研究所)は、鋼管杭協会と共同で、杭式桟橋の弾塑性解析プログラム N-Pier Ver.1.0 を開発し、公開した。このプログラムは、NPILAN-SN をベースにプレ・ポストプログラムを追加したものである。

2004 年、港湾空港技術研究所(以下、港空研)と鋼管杭協会と MRT は共同で N-Pier Ver.2.00 を開発し、MRT を窓口として販売を開始した。これは、Ver.1.00 のプレ・ポストプログラムを大幅に改良したものであり、直杭式だけでなく斜杭式桟橋も解析できるようにしたものである。

2007 年 4 月には、「港湾の施設の技術上の基準」が改正・施行され、それにあわせて N-Pier Ver.3.00 を開発した。Ver.3.00 では、同基準の改正に対応するため、部分係数法に基づく照査法、地盤バネの新しい計算法、1 質点及び 2 質点非線形動的解析機能が追加された。

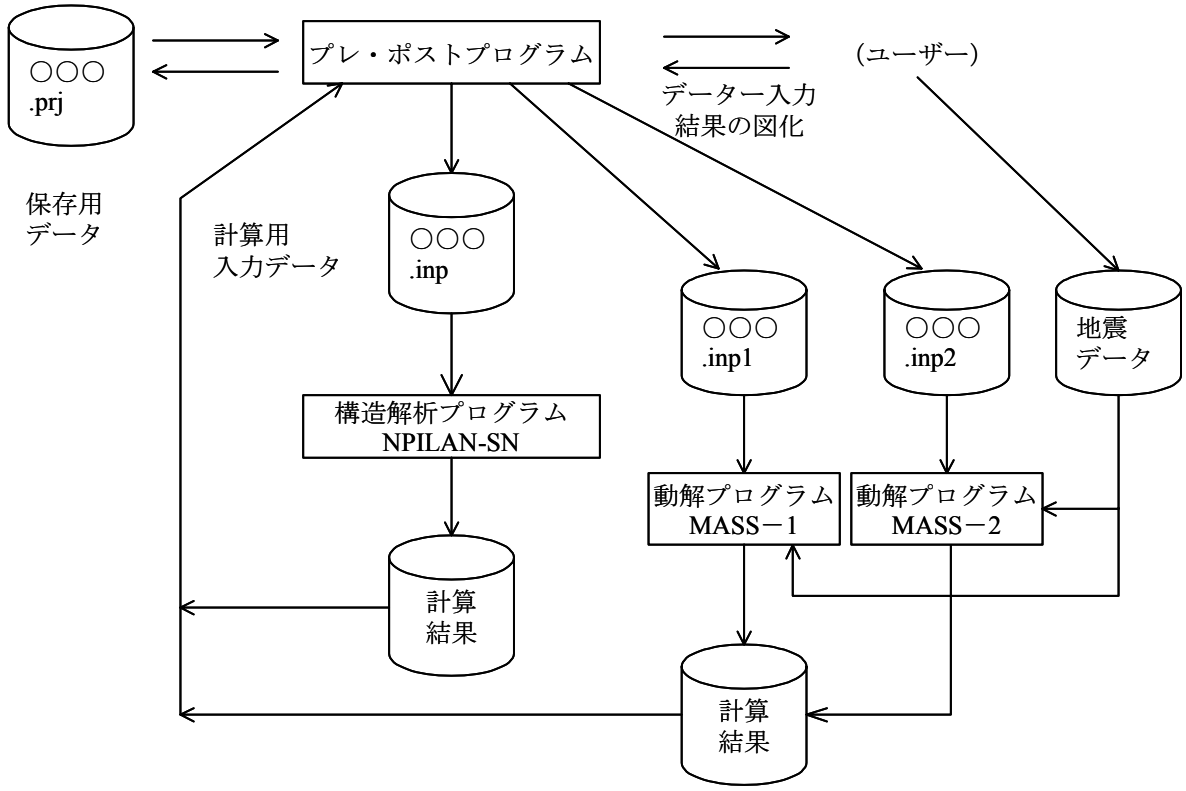
以上の開発経緯を表－1.1 に示す。

表－1.1　N-Pier の開発経緯

1990 年～	NPILAN 開発(鋼管杭協会、MRT)
1997 年～	NPILAN-SN 開発(鋼管杭協会、MRT)
1999 年 10 月	N-Pier Ver.1.00 開発、公開(港研、鋼管杭協会)
2004 年 6 月	N-Pier Ver.2.00 開発、販売(港空研、鋼管杭協会、MRT)
2007 年 10 月	N-Pier Ver.3.00 開発、販売(港空研、鋼管杭協会、MRT)

2. N-Pier の構成

N-Pier は、対話式によってデータを作成し、さらに計算結果を図化するプレ・ポストプログラムと、構造解析を行うプログラム NPILAN-SN、1 質点動的解析プログラム(MASS－1)、2 質点動的解析プログラム(MASS－2)を合わせた 1 つのシステムである(図－2.1 参照)。



図－2.1　N-Pier の構成

ユーザーは、プレプログラムによってデータを作成し、計算を実行、ポストプログラムによって計算結果を図化、印刷する。ユーザーが入力したデータは、○○○.prj ファイルとして保存される。

3 つの計算プログラム用の入力データは、プレ・ポストプログラムで自動作成される。ただし、動解用の地震加速度データはユーザーが用意する必要がある。

本マニュアルでは、N-Pier の中心プログラムである NPILAN-SN の計算理論とインプット/アウトプットデータの内容について説明する。N-Pier の計算の内容を深く理解する場合、現 N-Pier では表示されない詳しい計算過程などを調べる場合などに本マニュアルを使用する。

3.　N-Pier の解析理論

3.では、N-Pierで用いている構造解析プログラムNPILAN-SNの解析理論を説明する。

3.1 解析モデル

解析の前提は次の通り。

○構造は２次元とする。

○地盤バネの荷重－変位関係はバイリニアとする。

○杭は鋼管杭とし、鋼の応力ー歪関係は完全弾塑性型とする。ただし、M-φ関係を入力することによって場所打ち杭等も解析可能である。

本プログラムでは、次の２つの座標系を用いる。(図-3.1参照)

１）全体座標系　（Ｘ－Ｚ）

２）部材座標系　（ｘ－ｚ）

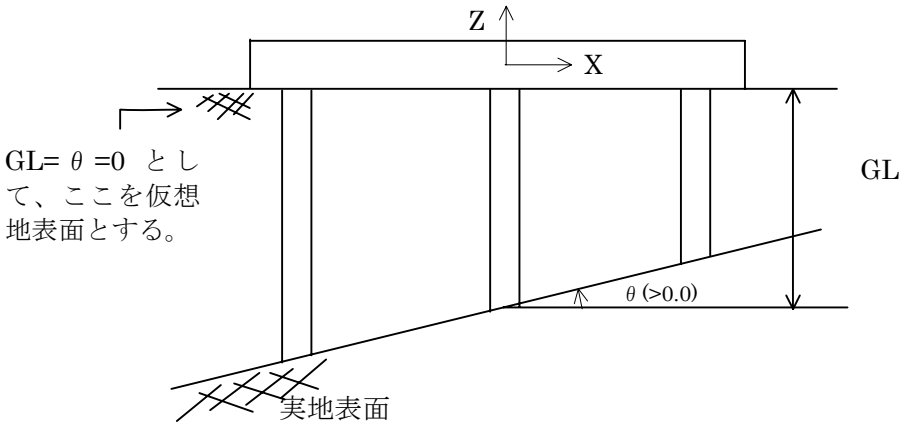
全体座標系の原点は、床版中央断面の中央とし、水平へＸ軸、鉛直上向きにＺ軸をとる。全体系の解析はこの座標系について行われる。

設計地盤面の角度は任意とし、床版下面と実地盤面との位置関係を指定するために地盤面の高さGLと傾きθを入力する。ただし、N-Pierでは、GLとθは0とし、床版下面を仮想の地表面とする（図-3.1a参照)。この仮想地表面と実地表面間の杭に対しては、非常に弱い仮想的な地盤バネを取り付ける。

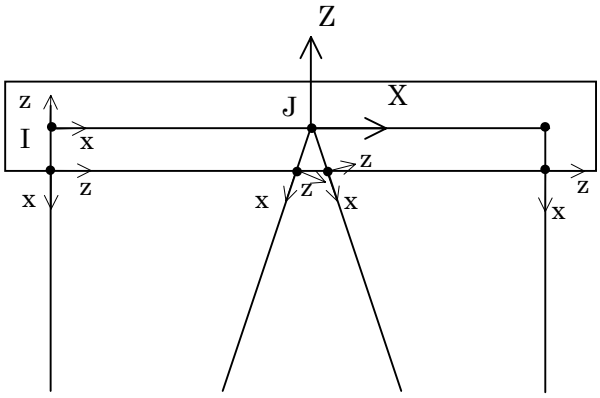
部材座標系には、杭座標系と梁座標系がある。杭座標系の原点は、床版下面での杭との結合部とし、下向きにｘ軸、反時計回りの方向へｚ軸をとる。各杭の計算はこの座標系によって行われ、杭の変位と断面力はこの座標系で出力される。梁座標系は、ノードIからJへ向かってｘ軸をとり、鉛直上向きにz軸をとる。

図-3.2に解析モデルを示す。解析は杭部分と床版部分に分けて行われる。杭部分の解析は、伝達マトリックス法で行われ、その剛性は杭頭(同図の●印)で評価される。この剛性は、(剛域がある場合は)剛域の影響を考慮して、床版上のノード(同図の◉印)の剛性へ組み込まれる。床版部分の解析も伝達マトリックス法で行われるが、最終的には、床版上の各ノードの剛性として評価される。構造解析は床版上のノードの全自由度(同図の場合は、3自由度/ノード×4ノード=12自由度)に対して行われる(詳細は3.2以下参照)。

なお、図-3.2における杭頭部の剛域の設定は、床版厚HBを与えることでプログラム内で自動的に行われる。一方、床版の梁の剛域はユーザーが設定することになる。

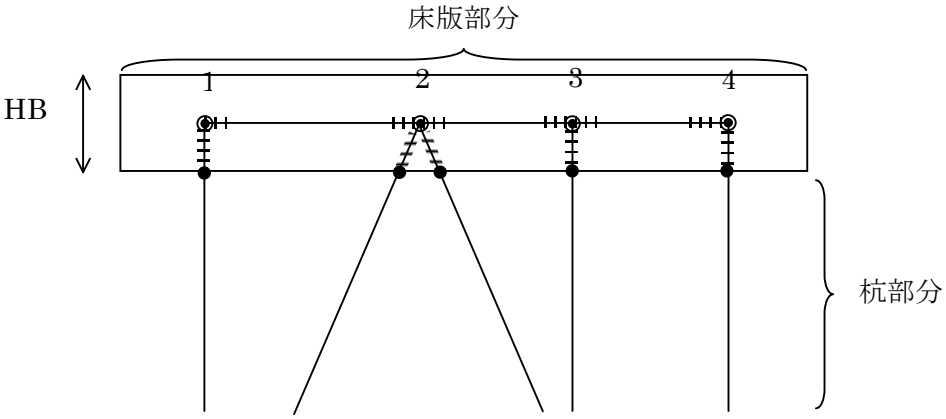


a)全体座標系と地盤面の定義方法



b)部材座標系

図-3.1　座標系



◉　計算に用いるノード
●　杭の剛性を評価するノード
剛域
HB　床版の厚さ

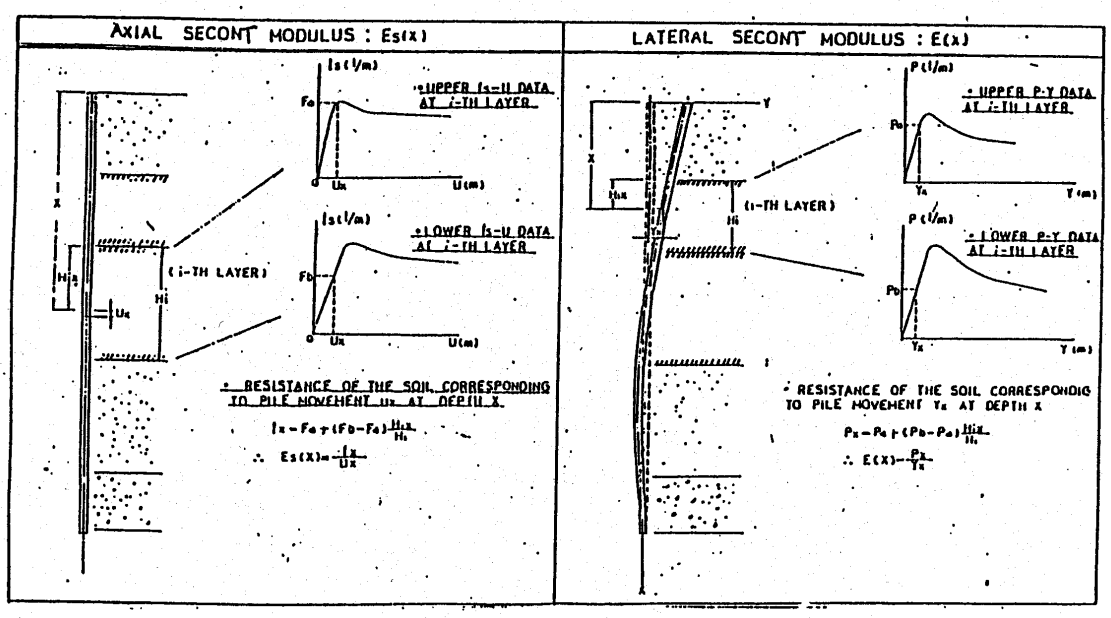
図-3.2　解析モデル

3.2　単杭の解析

（1）地盤反力-変位関係の取扱い

地盤反力-変位関係を示すｐ－ｙ曲線(杭軸直角方法)、ｆ－ｚ曲線(杭軸方向)は、任意の深さでの値が*)入力できるが、入力点の中間については以下に示すように深さ方向に線形補間された値を用いる。

杭先端抵抗-変位関係を示すＱ－Ｚ曲線は集中バネとして取り扱う**)。



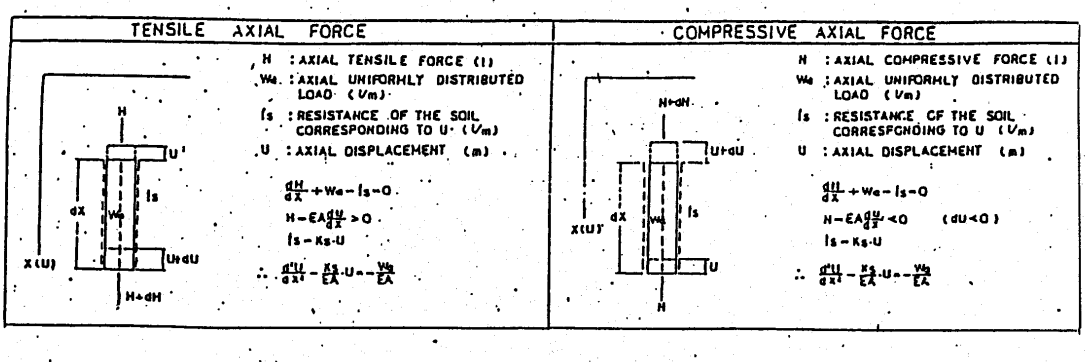
解析は、軸方向,横方向について以下に示すような微分方程式の解を求め、伝達マトリックス法を用いて解く。なお、以下の式でヤング率Ｅは一定としている。杭体について弾塑性解析を行なう場合は、このヤング率を変化させる。詳細は（2）の2）参照。

---

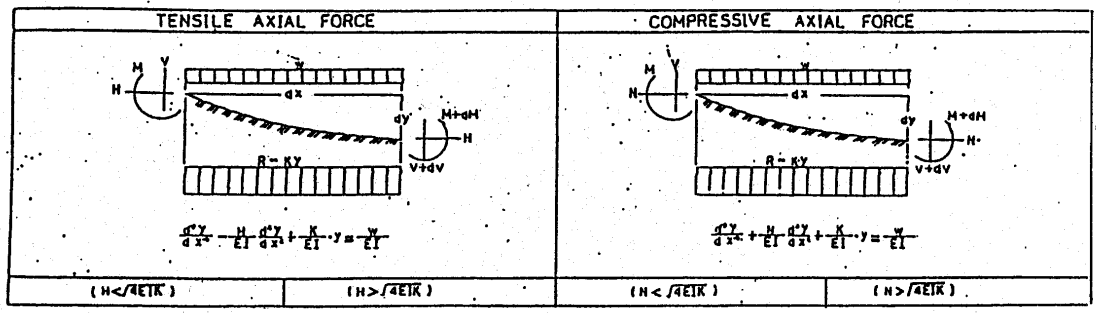
*）解析結果に比較的大きな影響を与える地表面付近については、地盤条件が同じでも、ｐ－ｙ曲線の入力点を多くする必要がある（1/βの範囲では杭径の1～2倍程度のスパンで入力するのがよい)。

**)NPILAN-SNでは、杭軸方向の解析に対しては、ここで述べるｆ－ｚ曲線とＱ－Ｚ曲線を用いる方法と、杭頭につける非線形集中バネを用いる方法の2つが用意されている。N-Pierでは後者の方法のみを用いている。

● 軸方向



● 横方向



最初に軸方向解析を行ない、得られた軸力を用いて横方向の解析を行う。

式（11）には軸方向の格間伝達式を示す。軸方向の格間伝達式は、杭要素両端の軸変位(U)と軸力(T)の関係を定義する。

$$\begin{bmatrix} U \\ T \\ 1 \end{bmatrix}^{R} = \begin{bmatrix} \cosh(m\ell) & \frac{\sinh(m\ell)}{EAm} & \frac{Wa}{Ks}[1-\cosh(m\ell)] \\ EAm\cdot\sinh(m\ell) & \cosh(m\ell) & -\frac{EAmWa}{Ks}\sinh(m\ell) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ T \\ 1 \end{bmatrix}^{L} \qquad (11)$$

ここでR，Lは杭要素のそれぞれ右端と左端を意味する。また、Ｉは要素長、mは特性値（$=\sqrt{Ks/EA}$）をあらわす。右辺のマトリックスを伝達マトリックスという。伝達マトリックスを杭頭から順に杭先端までかけあわせ、最後に杭先端での境界条件を代入することによって、杭頭での力と変位の関係式が求まる。

$$T^{R}=K_{V}\cdot U^{R} \cdots\cdots\cdots\cdots（１２）$$

横方向については、軸力を受ける弾性床状の梁の理論の解から軸力(N)等がパラメーターになった次のような横方向格間伝達式が得られる。

$$
\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}^{R} =
\begin{bmatrix}
F_1 + \frac{N}{4EI\beta^2}F_3 & \frac{G_2}{2\beta} & -\frac{F_3}{2EI\beta^2} & -\frac{F_4}{4EI\beta^3} & \angle T_y \\
-\beta F_4 & F_1 + \frac{N}{4EI\beta^2}F_3 & -\frac{F_2}{2EI\beta} & -\frac{F_3}{2EI\beta^2} & \angle T_\theta \\
2EI\beta^2 \cdot F_3 & EI\beta \cdot F_4 & F_1 - \frac{N}{4EI\beta^2}F_3 & \frac{F_2}{2\beta} & \angle T_m \\
2EI\beta^3 \cdot F_2 & 2EI\beta^2 \cdot F_3 & -\beta G_4 & F_1 - \frac{N}{4EI\beta^2}F_3 & \angle T_s \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ V \\ 1 \end{bmatrix}^{L} \quad (13)
$$

ここで、y：横方向変位、θ：回転変形、M：モーメント、V：せん断力であり、伝達マトリックスの1～4列は剛性を示す係数で、第5列は荷重項に相当し、これら係数は軸力と杭の剛性、地盤抵抗の割線係数に依存する。

式(13)に示す伝達マトリックスの各項は、軸力の正負、軸力の大きさと特性値(=$\sqrt{4EI \cdot K}$)の大小によって異なる。１例として、軸力が圧縮、N＜$\sqrt{4EI \cdot K}$ の時の計算式を示すと次のようになる。

$$
\alpha = \sqrt{\beta^2 - \frac{N}{4EI}}, \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}, \quad \gamma = \sqrt{\beta^2 + \frac{N}{4EI}}
$$

$$F_1=\cosh(\alpha\ell)\cos(\gamma\ell)$$

$$F_2=\frac{\beta}{\alpha\gamma}\left(\alpha\cdot\cosh(\alpha\ell)\sin(\gamma\ell)+\gamma\cdot\sinh(\alpha\ell)\cdot\cos(\gamma\ell)\right)$$

$$F_3=\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}\sinh(\alpha\ell)\sin(\gamma\ell) \tag{14}$$

$$F_4=\frac{\beta}{\alpha\gamma}\left(\alpha\cdot\cosh(\alpha\ell)\sin(\gamma\ell)-\gamma\cdot\sinh(\alpha\ell)\cdot\cos(\gamma\ell)\right)$$

$$G_2=\frac{1}{\beta}\left(\frac{2\gamma^2-\beta^2}{\gamma}\cosh(\alpha\ell)\sin(\gamma\ell)+\frac{2\alpha^2-\beta^2}{\alpha}\sinh(\alpha\ell)\cdot\cos(\gamma\ell)\right)$$

$$G_4=\frac{1}{\beta}\ \frac{2\gamma^2-\beta^2}{\gamma}\cosh(\alpha\ell)\sin(\gamma\ell)-\frac{2\alpha^2-\beta^2}{\alpha}\sinh(\alpha\ell)\cdot\cos(\gamma\ell))$$

$$\mathcal{L}T_y=\frac{W}{K}\left[1-\left(F_1+\frac{N}{4EI\beta^2}F_3\right)\right]$$

$$\mathcal{L}T_\theta=\frac{\beta W}{K}F_4$$

$$\mathcal{L}T_m=-\frac{2EI\beta^2\cdot W}{K}F_3$$

$$\mathcal{L}T_s=-\frac{2EI\beta^3\cdot W}{K}F_2$$

横抵抗解析は、反復法によって行われる。まず、横方向変位を仮定し、この時の地盤抵抗と割線係数を計算する。次にそれを用いて伝達マトリックスを作成し軸方向の場合と同様の計算を行い、変位分布を求める。この変位が前に仮定したものと等しくなるまで繰り返し計算し、最終的な変位分布と曲げモーメント分布を求める。

この時、軸方向解析の場合と同様に、かけあわせた伝達マトリックスを境界条件に応じて解くことによって杭頭における荷重と変位の関係が（15）式のように求まる。なお、杭先端での境界条件は　M＝V＝0とする。

$$\begin{bmatrix} M \\ V \end{bmatrix}^R = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \theta \end{bmatrix}^R + \begin{bmatrix} m \\ f \end{bmatrix} \quad \cdots (15)$$

ここで

$\begin{bmatrix} M \\ V \end{bmatrix}^R$　：杭頭に作用する荷重の荷重ベクトル

$\begin{bmatrix} Y \\ \theta \end{bmatrix}^R$　：杭頭の変位の変位ベクトル

$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$　：剛性マトリックス

$\begin{bmatrix} m \\ f \end{bmatrix}$　：杭途中に作用する荷重の等価荷重ベクトル

（２）Ｍ－Ｐ－Φ関係の取扱い

１）Ｍ－Ｐ－Φ関係の定義

本プログラムでは$\boxed{4-2}$$\boxed{\text{杭断面データ}}$で材料タイプMMATを指定することにより、下記の４つのＭ－Ｐ－Φ曲線を選択することができる。なお、MMAT=0の時、杭は弾性体であり、杭の断面ごとに任意のMMATを用いることが可能である。

①　バイ・リニアモデル（MMAT=２の時）

$$M = E \cdot Z_e \cdot R \cdot \varphi \quad for\,\varphi \le \varphi_p$$

$$M = M_p \quad for\,\varphi > \varphi_p$$

ここに,

$$\varphi_p = (M_p / M_y) \cdot \varphi_y$$

$$\varphi_y = (1-\alpha) \cdot \varphi_{yo}$$

$$\varphi_{yo} = \varepsilon_y / R$$

$$M_p = M_{po} \cdot \cos\frac{\pi\alpha}{2}$$ （塑性モーメント）

$$M_y = (1-\alpha) M_{yo}$$ （降伏モーメント）

$$M_{po} = \sigma_y \cdot Z_p$$ （軸力が０の時の塑性モーメント）

$$M_{yo} = \sigma_y \cdot Z_e$$ （軸力が０の時の降伏モーメント）

$$\alpha = N / N_{YO}$$ （軸力比パラメータ）

$$N_{YO} = \sigma_y \cdot A$$ （降伏軸力）

A : 鋼管の断面積

Z_e: 弾性断面係数＝$\frac{\pi}{4} \cdot (R^4 - r^4) / R$

Z_P:塑性断面係数＝$\frac{4}{3} R^3 (1-(1-\frac{t}{R})^3)$

R : 鋼管の外半径

r ：鋼管の内半径

t ：板厚$(t / R << 1)$

σ_y: 鋼の降伏応力

N ：軸力

M ：モーメント

$\varepsilon_y = \sigma_y / E$ （降伏ひずみ）

②トリ・リニアモデル（MMAT=３の時）

α＞０の時

$$M = E \cdot Z_e \cdot R \cdot \varphi \qquad for \varphi \le \varphi_y$$

$$M = g \cdot \varphi + h \qquad for \varphi_y < \varphi \le \varphi_u$$

$$M = M_p \qquad for \varphi > \varphi_u$$

ここに、

$$g = (M_s - M_y) / (\varphi_s - \varphi_y)$$

$$h = (\varphi_s \cdot M_y - \varphi_y M_s) / (\varphi_s - \varphi_y)$$

$$M_s / M_{yo} = 1 + 0.21\alpha - 1.05\alpha^2$$

$$\varphi_s / \varphi_{yo} = 1 / (1 - 1.395\alpha + 1.206\alpha^2)$$

$$\varphi_u = (\varphi_s \cdot (M_p - M_y) + \varphi_y \cdot (-M_p + M_s)) / (M_s - M_y)$$

α＝０の時

$$M = E \cdot Z_e \cdot R \cdot \varphi \qquad for \varphi \le \varphi_y$$

$$M = g \cdot \varphi + h \qquad for \varphi_y < \varphi \le \varphi_u$$

$$M = M_p \qquad for \varphi > \varphi_u$$

ここに、

$$g = (M_p - M_y) / (\varphi_u - \varphi_y)$$

$$h = (\varphi_u \cdot M_y - \varphi_y M_p) / (\varphi_u - \varphi_y)$$

$$\varphi_u = 2\varphi_y$$

③CHENモデル（MMAT=１の時）

$$M = E \cdot Z_e \cdot R \cdot \varphi \qquad for \varphi \le \varphi_y$$

$$M = b - c / \sqrt{\varphi} \qquad for \varphi_y < \varphi \le \varphi_s$$

$$M = M_p - f / \varphi^2 \qquad for \varphi > \varphi_s$$

ここに、

$$b = (\sqrt{\varphi_s} \cdot M_s - \sqrt{\varphi_y} \cdot M_y) / (\sqrt{\varphi_s} - \sqrt{\varphi_y})$$

$$c = (M_s - M_y) / (\frac{1}{\sqrt{\varphi_y}} - \frac{1}{\sqrt{\varphi_s}})$$

$$f = \varphi_s^2 / (M_p - M_s)$$

④場所打ち杭モデル（MMAT=4の時）

M-φ関係を折線で直接入力する。この時、軸力の影響を考慮することはできない。

２）Ｍ－Ｐ－Φ関係を考慮した計算方法

本プログラムではヤング率Ｅを変化させることでＭ－Ｐ－Φ関係を考慮する。単杭計算の具体的な流れを次のフローチャートで表す。なお、下添字i，jは，部材のi端とj端を示す。

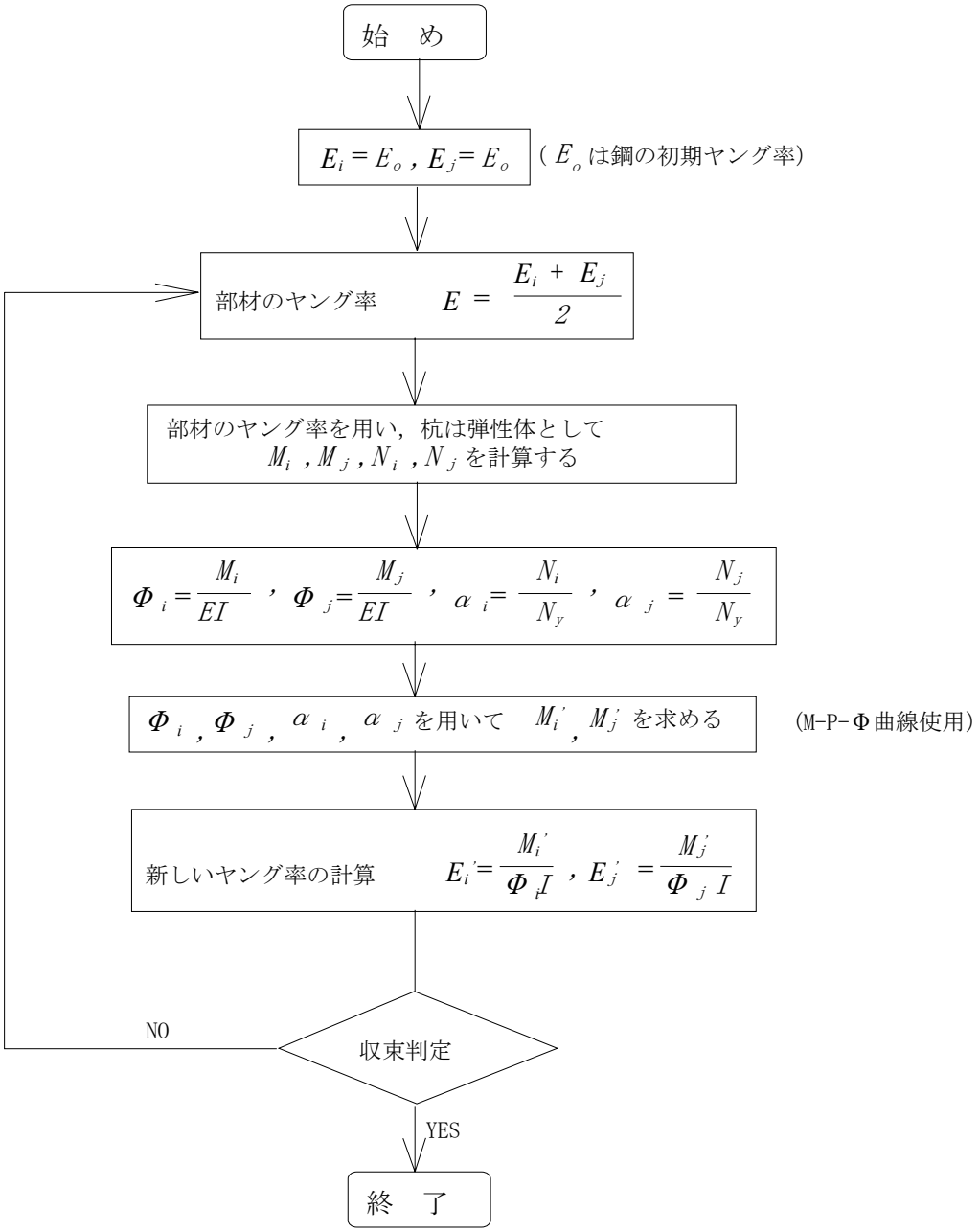
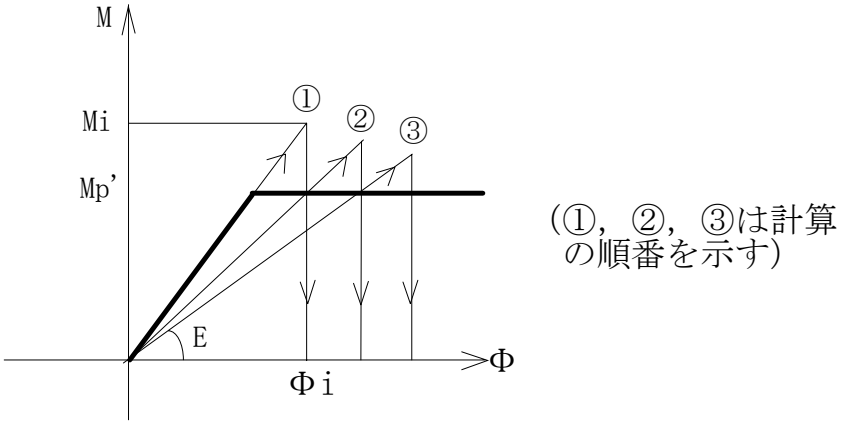


図-3.3　部材のヤング率の評価方法

前頁のフローチャートを図で示すと次のようになる



なお、軸力が大きくなると計算上不安定になるので、コントロールカード その３ で軸力と降伏軸力の比率αの最大値$(YT\overline{O}L4)$を設定し、αがこの値以上にはならないものとし計算上不安定化しないようにしている。

ひずみは次式で計算する。

軸方向のひずみ　$\varepsilon_a = \dfrac{N}{AE}$

曲げによる外縁のひずみ　$\varepsilon_b = \Phi \cdot R$

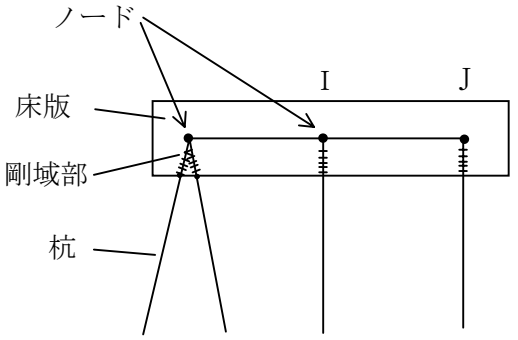
ここで、Ｅは新しく計算したヤング率で、Φは曲率である。

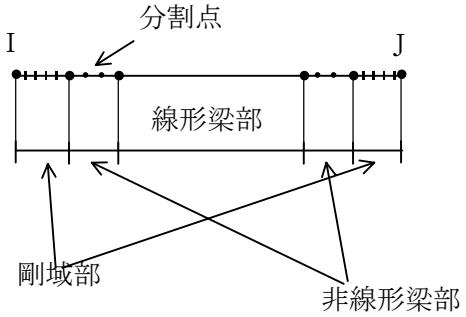
3.3　床版部の梁の解析

床版部の梁系モデルの解法は、単杭解析と同様に、伝達マトリックス法を用いて梁部材の部材剛性マトリックスを作成し、これを全体系へ変換して、全体解析に組み込む。また、全体解析に用いる部材端力もあわせて計算する。

（１）　床版部分のモデル化

床版部分は梁要素でモデル化する。梁の剛性は、梁両端のノードＩ、Ｊで評価される。ノードは、床版断面の中央で、杭との交点に設ける。



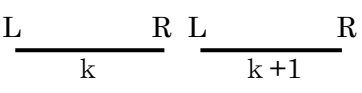


１本の梁は、剛域部、非線形梁部、線形梁部にわけられる。なお、剛域部、非線形梁部はなくてもよい。非線形梁部分は、剛性変化を考慮するため、２、３分割する。

１本の梁（部材Ｉ－Ｊ）の剛性マトリックスは、部材両端のノードＩ、Ｊにおける変位と断面力の関係を表すものである。１本の梁は、剛域部（ＥＩ無限大)、非線形梁部（ＥＩ変化)、線形梁部（ＥＩ一定）を代表する小梁の連続体として定義される。以下では、伝達マトリックス法を用いて、小梁の特性を伝達し、最終的に、部材両端での剛性マトリックスを求める手順を説明する。

（２）　部材剛性マトリックスの計算

伝達マトリックス法では、以下のように梁端の状態量 V の伝達式が組み立てられる。



$$V_k^{\ R} = F_k V_k^{\ L} \quad \text{----------(1)}$$

$$V_{k+1}^{\ L} = P_k V_k^{\ R} \quad \text{----------(2)}$$

ここで、F_k は格間伝達マトリックスで、以下のようになる。また、状態量 V は、変位 u、w、θ と断面力M、N、Qで表わされ、梁の両端において定義される。

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/EA & 0 & u_0^{\ p} \\ 0 & 1 & -l & l^2/2EI & 0 & l^3/6EI & w_0^{\ p} \\ 0 & 0 & 1 & -l/EI & 0 & -l^2/2EI & \theta_0^{\ p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l & M_0^{\ p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & N_0^{\ p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Q_0^{\ p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V^R = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ M \\ N \\ Q \\ 1 \end{bmatrix}^R, \quad V^L = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ M \\ N \\ Q \\ 1 \end{bmatrix}^L$$

＊）添字 p は外力項を示す。また、添字 R、L は部材の右端と左端を示す。

(1)式は、各梁部材要素の左端(L)の状態量を右端(R)に伝達するものである。また、(2)式は、要素の支点間で状態量を伝達するもので、P_kは、格点伝達マトリックスである。

なお、ここでは、梁部材の各要素は１直線で連続し、また、梁部材途中に外力は作用しないものとしているので、格点伝達マトリックスは、単位行列となる（したがって、$V_{k+1}{}^L = V_k{}^R$)。

各梁部材要素の F_kを作成し、(1)式と(2)式から状態量を以下のように伝達させていけば、連続した梁部材両端での伝達式が作成できる。

$$V_n{}^R = F_n F_{n-1} \cdots F_2 F_1 \cdot V_1{}^L \quad \text{----------(3)}$$

(3)式は、次のように表わされる。

$$[V_n]^R = [F] \cdot [V_1]^L \quad \text{---------- (4)}$$

ここで、$[F] = F_n F_{n-1} \cdots F_2 F_1$

(4)式を、以下のような変位法による基礎方程式の形に変形し、梁部材の剛性マトリックスを求める。

$$[f] = [K] \cdot [u] \quad \text{---------- (5)}$$

$[K]$：剛性マトリックス　，$[f] = \begin{bmatrix} Q_L \\ N_L \\ M_L \\ Q_R \\ N_R \\ M_R \end{bmatrix}$　，$[u] = \begin{bmatrix} w_L \\ u_L \\ \theta_L \\ w_R \\ u_R \\ \theta_R \end{bmatrix}$

以下に、(4)式から(5)式を導く過程を示す。

まず、(4)式を軸方向力による伝達式と曲げ・せん断力による伝達式とに分ける。

・軸方向力による伝達式

$$\begin{bmatrix} u \\ N \end{bmatrix}^R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ N \end{bmatrix}^L \quad \text{----------(6)}$$

・曲げ・せん断力による伝達式

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}^R = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}^L \quad \text{----------(7)}$$

ここで、(6)式を、以下のように変形して、

$$\begin{bmatrix} N_L \\ N_R \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} -a_{11}/a_{12} & 1/a_{12} \\ \hline a_{21} - a_{22}\, a_{11}/a_{12} & a_{22}/a_{12} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} u_L \\ u_R \end{bmatrix}$$

上式を次式のように表す。

$$\begin{bmatrix} N_L \\ N_R \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} u_L \\ u_R \end{bmatrix} \quad \text{----------} (8)$$

また、(7)式を、以下のように変形する。

$$\begin{bmatrix} g_R \\ G_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_L \\ G_L \end{bmatrix} \quad \text{----------} (9)$$

ここで、

$$[g_R] = \begin{bmatrix} w_R \\ \theta_R \end{bmatrix} \quad , \quad [G_R] = \begin{bmatrix} M_R \\ Q_R \end{bmatrix}$$

$$[g_L] = \begin{bmatrix} w_L \\ \theta_L \end{bmatrix} \quad , \quad [G_L] = \begin{bmatrix} M_L \\ Q_L \end{bmatrix}$$

$$[T_{11}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad [T_{12}] = \begin{bmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}$$

$$[T_{21}] = \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \quad , \quad [T_{22}] = \begin{bmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

これより、(7)式を以下のように変形して、

$$\begin{bmatrix} G_L \\ G_R \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} -(T_{12})^{-1} T_{11} & (T_{12})^{-1} \\ \hline T_{21} - T_{22}(T_{12})^{-1} T_{11} & T_{22}(T_{12})^{-1} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} g_L \\ g_R \end{bmatrix}$$

上式を次式のように表す。

$$\begin{bmatrix} M_L \\ Q_L \\ M_R \\ Q_R \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ \hline B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} w_L \\ \theta_L \\ w_R \\ \theta_R \end{bmatrix} \quad \text{----------} (10)$$

(8)式と(10)式から、(5)式の剛性マトリックス［K］は以下のように導かれる。

$$\begin{bmatrix} Q_L \\ N_L \\ M_L \\ Q_R \\ N_R \\ M_R \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} B_{21} & & B_{22} & B_{23} & & B_{24} \\ & A_{11} & & & A_{12} & \\ B_{11} & & B_{12} & B_{13} & & B_{14} \\ \hdashline B_{41} & & B_{42} & B_{43} & & B_{44} \\ & A_{21} & & & A_{22} & \\ B_{31} & & B_{32} & B_{33} & & B_{34} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} w_L \\ u_L \\ \theta_L \\ w_R \\ u_R \\ \theta_R \end{bmatrix} \quad \text{----------(11)}$$

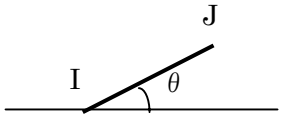
（３） 全体剛性マトリックスへの組み込み

(5)式の［K］は、各梁部材の部材座標系での剛性マトリックスである。これを、以下のように座標変換マトリックス［T］をかけて、全体座標系での剛性マトリックスに変換する。

$$\left[\overline{K}\right] = \left[T\right]^T \cdot \left[K\right] \cdot \left[T\right] \quad \text{----------(12)}$$

$\left[T\right]^T$ ：$\left[T\right]$の転置マトリックス

座標変換マトリックスは、（３×３）の変位に対して、以下のように定義される。



$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最後に、(12)式で求めた剛性マトリックスを全体系マトリックスに組み込む。

また、前の全体解析で求められた部材両端の変位(部材座標系)に部材座標系での剛性マトリックスをかけて、部材端力を計算し((5)式参照)、さらに座標変換マトリクスをかけてこれを等価部材端力((13)式参照)として全体系の解析に組み込む。

$$\left[\mathrm{f}\right] = \left[\mathrm{K}\right] \cdot \left[\mathrm{u}\right] \quad \text{----------(5)}$$
$$\left[\overline{\mathrm{F}}\right] = \left[\mathrm{T}\right] \cdot \left[\mathrm{f}\right] \quad \text{----------(13)}$$

3.4　全体系の解析

単杭の解析を行うことによって、各杭頭における剛性マトリックス［ｋｉ］と、等価荷重ベクトル｛ｆｉ｝が求まる。なお、｛ｆｉ｝は杭途中に荷重が作用する場合に計算される（3.2の(15)式参照)。また、3.3に述べたように、床版部梁の剛性マトリックス〔ｋｊ〕も計算される。

床版上の各ノードに作用する力を｛Fo｝、ノードの変位を｛Uo｝とすると、以下の関係式が成立する。なお、｛Fo｝、｛Uo｝のベクトルの大きさは３×Ｎである（Ｎは全ノード数)。

$$\{Fo\} = [K]\{Uo\} + \{f\} \qquad \cdots (1)$$

ここで

$$\{Fo\} = \sum \begin{bmatrix} F_Z \\ F_X \\ M_Y \end{bmatrix}_n$$ ：　ノードｎに作用する力の外力ベクトル
(F_Z:鉛直力，F_X:水平力，M_Y:モーメント)

$$\{Uo\} = \sum \begin{bmatrix} V \\ U \\ \theta \end{bmatrix}_n$$ ：　ノードｎの変位
(V:鉛直，U:水平，θ:回転)

$$[K] = \Sigma [Ti]^T [ki][Ti] + \Sigma [Tj]^T [kj][Tj]$$

：全体系の剛性マトリックス

［Ｔｉ］:　杭ｉの座標変換マトリックス

［ｋｉ］:　杭ｉの剛性マトリックス

［Ｔｊ］:　梁ｊの座標変換マトリックス

［ｋｊ］:　梁ｊの剛性マトリックス

$$\{f\} = \Sigma [Ti]^T \{fi\}$$ ：全体系に変換した杭の等価荷重ベクトル

｛fi｝:　杭ｉの等価荷重ベクトル

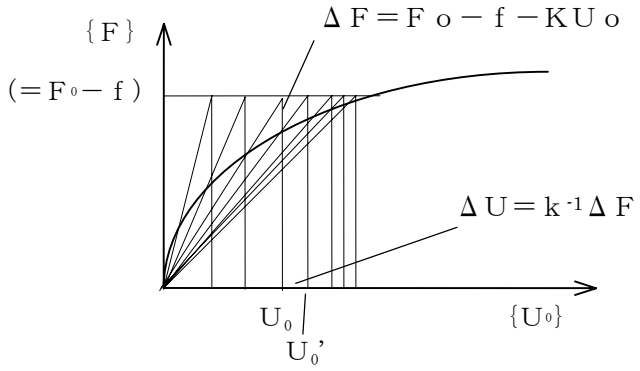
(1)式の内の［K]、｛ｆ｝はノードの変位にともなって変化するので、反復法によって収束計算を行う(図-3.4参照)。収束計算は次の手順で行う。

1)床版の変位Ｕｏを仮定する（１回目はＵｏ＝0とする)。

2)Ｕｏが求まると各杭の杭頭変位が求まるので、それを用いて単杭の計算を行いｋｉ、ｆｉを計算する(3.2参照)。同じく、各ノードの変位を用いて、床版の剛性マトリックスを計算する(3.3参照)。

3)(1)式に示す全体系の方程式を組み立て新しい変位Ｕｏ’を次式で計算する。計算されたＵｏ’と前回のＵｏを比較し、両者が十分近い値になったとき収束したものとする。収束しないときは再び 2)へ戻る。

$$U_o' = U_o + \Delta U、\Delta U = K^{-1}\Delta F$$



図－3.4　収束計算の方法

収束の判定は次式によって行う。

$$\frac{|V - V'|}{V'} < TOL_1$$

$$\frac{|U - U'|}{U'} < TOL_2$$

$$\frac{|\theta - \theta'|}{\theta'} < TOL_3$$

ここで

Ｖ　：新しく計算された各ノードの鉛直変位の合計

Ｖ’：前回の各ノードの鉛直変位の合計

Ｕ　：新しく計算された各ノードの水平変位の合計

Ｕ’：前回の各ノードの水平変位の合計

θ　：新しく計算された各ノードの回転変位の合計

θ’：前回の各ノードの回転変位の合計

TOL_1：収束判定用変数（鉛直方向変位（%））

TOL_2：収束判定用変数（水平方向変位（%））

TOL_3：収束判定用変数（回転変位（%））

TOL_1～TOL_3はユーザー$\boxed{\text{コントロールカード}}\boxed{\text{（その２）}}$がで入力する。すべての誤差が許容値内入った時、収束したとする。くり返し計算ごとの上式の左辺、右辺の値はファイルに出力されるので、収束しなかった時は最後のステップの値を見て収束判定用変数の値を変更する。